E.S.C.A.E.

MATHÉMATIQUES II

Statistique et probabilités

DURÉE : 3 heures

Avec ce sujet seront distribuées 3 feuilles de papier graphique :

- *1 feuille de papier millimétré;*
- *1 feuille de papier gausso-arithmétique;*
- *1 feuille de papier à 2 échelles logarithmiques.*

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuille supplémentaire.

L'utilisation de papiers différents apportés par le candidat serait assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible,...).

Les candidats doivent IMPÉRATIVEMENT *respecter la précision demandée dans les résultats numériques.*

EXERCICE (*sur 6 points*)

N.B. – Dans cet exercice, TOUS les nombres figurant dans le tableau de calcul seront arrondis, au plus proche, à 0,0001 près et les calculs seront effectués UNIQUEMENT à partir de ces valeurs. Les résultats demandés seront indiqués avec la même précision.

Dans le tableau ci-dessous, x représente le nombre d'employés du secteur industriel et y le montant des ventes, hors taxes, en millions de francs de ce secteur.

Secteur	x_i	y_i
Production d'équipement industriel	219 781	62 431
Fabrication de matériel de manutention	66 245	23 226
Industrie de l'armement	7 114	1 500
Fabrication d'équipement ménager	55 666	14 082
Construction automobile	496 121	180 094
Travail du grain	66 285	48 359

SOURCE : *Tableau de l'économie française 1983*, INSEE.

1° Représenter le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ sur le papier à deux échelles logarithmiques.

2° On pose $u_i = \log x_i$ et $v_i = \log y_i$ (log = logarithme décimal).

Afin de vérifier la validité d'un ajustement linéaire de ce nuage de points, calculer le coefficient de corrélation linéaire entre u et v.

3° Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite ajustant les valeurs de v à celles de u.

Tracer cette droite sur le graphique précédent après avoir déterminé deux de ses points.

x^* [illegible] entre x et y

PROBLÈME (*sur 14 points*)

Ce problème comprend quatre parties indépendantes.

I

Le nombre de voitures d'un modèle donné vendues quotidiennement par un concessionnaire de la marque définit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,02	0,08	0,1	0,3	0,4	0,1

1° Calculer l'espérance mathématique de X et son écart type (ce dernier sera arrondi à 0,001 près au plus proche).

2° On a constaté que 70 % des acheteurs ont recours à un crédit.

Le nombre de clients de ce concessionnaire qui, au cours d'une journée, utilisent un crédit pour l'achat d'un véhicule de ce modèle définit une variable aléatoire Y.

a. Pour une valeur fixée x_i de X, définir la loi de probabilité conditionnelle de Y sachant $(X = x_i)$.

b. En déduire la loi conditionnelle de Y sachant X puis la loi conjointe du couple (X, Y).

N. B. — On présentera ces deux réponses sous forme de tableaux à double entrée.

c. Déterminer la loi marginale de Y et calculer l'espérance mathématique de cette variable.

II

A la demande d'une revue spécialisée, on contrôle la consommation aux 100 km d'un nouveau modèle de cette marque, consommation que le constructeur annonce de 6,5 l.

Dans ce but, une étude statistique a été réalisée sur un échantillon de 1000 véhicules appartenant à des lecteurs de cette revue.

Pour chacun d'eux, on a relevé la distance parcourue avec 30 l de carburant.

Distance parcourue en kilomètres	Nombre de véhicules
Moins de 432	12
[432 ; 436[	35
[436 ; 440[	89
[440 ; 444[	150
[444 ; 448[	201
[448 ; 452[	198
[452 ; 456[	160
[456 ; 460[	85
[460 ; 464[	40
[464 ; 468[	24
[468 ; 472[	5
472 et plus	1

.../...

1° Montrer, à l'aide d'une droite de Henry, que cette distribution peut être ajustée par une loi normale dont on déterminera graphiquement les paramètres.

2° Le nombre de kilomètres que peut parcourir une voiture de ce type avec 30 l de carburant définit une variable aléatoire Z.

On admet que Z suit la loi normale (448; 7,5).

Compte tenu de cette hypothèse :

a. A combien peut-on estimer la consommation moyenne aux 100 km?

b. Quelle est la probabilité qu'une voiture ne dépasse pas 6,5 l aux 100 km?

c. Quelle est la probabilité qu'une voiture consomme plus de 7 l aux 100 km?

d. Quelle est la probabilité qu'une voiture consomme entre 6,6 et 6,8 l aux 100 km?

N. B. — Pour les questions *b*, *c* et *d* les valeurs de la variable centrée réduite seront arrondies à 0,01 près au plus proche et les probabilités seront exprimées à 0,0001 près.

III

On désire mesurer l'efficacité d'une campagne publicitaire en faveur du dernier véhicule V_1 de la marque.

Celui-ci est en concurrence avec un véhicule de même type, V_2, précédemment commercialisé par une marque rivale.

On note $q_1(n)$ la probabilité qu'un individu interrogé au mois n de la campagne soit un acheteur potentiel de V_1 et $q_2(n)$ la probabilité que cet individu soit, à la même date, un acheteur potentiel de V_2. Le choix étant supposé exclusif on a, pour tout n, $q_1(n) + q_2(n) = 1$.

Un sondage effectué avant le lancement de la campagne permet de choisir les probabilités suivantes :

$$q_1(0) = 0{,}4 \qquad q_2(0) = 0{,}6$$

On note p_{ij} la probabilité qu'un individu acheteur potentiel de V_i au mois n de la campagne soit un acheteur potentiel de V_j au mois $n + 1$ et, après estimation, on pose :

$$p_{11} = 0{,}9 \qquad p_{21} = 0{,}4$$
$$p_{12} = 0{,}1 \qquad p_{22} = 0{,}6$$

Ces probabilités sont appelées probabilités de transition et on suppose donc qu'elles restent constantes tout au long de la campagne.

1° Calculer $q_1(n+1)$ en fonction de $q_1(n)$ et $q_2(n)$.

2° En déduire la relation de récurrence liant $q_1(n+1)$ et $q_1(n)$ puis l'expression de $q_1(n)$ en fonction de n.

3° Déterminer la limite l de $q_1(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4° On décide d'arrêter cette campagne publicitaire dès que $l - q_1(n) < 0{,}05$.

IV

Le concessionnaire a établi, pour les 500 premiers véhicules de ce nouveau modèle qu'il a vendus, la répartition des ventes en fonction du prix du véhicule suivant les options choisies :

Prix x_i (en dizaines de milliers de francs)	Effectifs n_i
6	51
6,3	146
6,7	172
7,1	69
7,8	62

1° Représenter, sur le papier millimétré joint au sujet, la courbe de concentration (ou courbe de Gini).

N. B. — Cette courbe sera inscrite dans un carré de 20 cm de côté.

Unité sur les deux axes : 2 mm pour 1 %.

Les coordonnées des points seront donc des pourcentages cumulés croissants qui seront arrondis, au plus proche, à une unité près.

2° Calculer, à 0,01 près au plus proche, l'indice de concentration (ou indice de Gini).